

УДК 539.3

Ю. Г. Пронина

**ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О ТОЧЕЧНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ
В УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ОТВЕРСТИЯМИ *)**

1. Введение. Теоретические исследования проблем прочности перфорированных конструкций базируются на анализе различных периодических задач теории упругости для тел с отверстиями. При достаточно редко расположенных порах правомерно применять аналитическое решение для одиночного отверстия в плоскости при произвольном нагружении [1]. Однако, если расстояние между порами не превышает нескольких их диаметров, необходимо учитывать их взаимное влияние. Одним из первых плоскость с бесконечным рядом круговых периодических отверстий рассмотрел R. C. J. Howland [2], представив функцию напряжений с помощью системы гармонических функций. Влияние круговых вырезов на распределение напряжений в пластинах и оболочках изучалось многими учеными. Для внешности периодических отверстий некруговой формы интегральное уравнение было получено Г. Н. Савиным [3]. Представляет особый интерес метод Д. И. Шермана, развитый им в 1953 г., который он затем обобщил на случай пластины с некруговыми отверстиями [4]. Оригинальные исследования авторов и подробные обзоры работ их предшественников, посвященные данному вопросу, приведены в [5–7]. Ряд результатов получен с использованием конформного отображения [5]. В трудах [8, 9] к периодическим задачам применялись формулы суммирования рядов [10].

Обычно для плоских задач теории упругости используется метод граничных сингулярных интегральных уравнений. На его основе разработан ряд численных алгоритмов расчета напряженно-деформированного состояния перфорированных пластин [8, 9, 11–13]. Начиная с середины 1980-х годов активно развивается быстрый мультипольный метод (fast multipole method) [11, 12]. Он позволяет существенно снизить порядок сложности задачи при расчете пластин с большим количеством дефектов (десятки тысяч и более) [14]. Несколько отличный от предыдущего метод мультипольного разложения применен в [15] к изучению взаимодействия двух близко расположенных круговых отверстий в условиях двухосного напряженного состояния.

В указанных исследованиях рассмотрены многосвязные тела, которые находятся под действием усилий, приложенных на их границе и на бесконечности. В настоящей статье учитываются также сосредоточенные воздействия во внутренних точках области. А именно, здесь дано развитие представленных в [16] результатов на случай полуплоскости с бесконечным периодическим рядом конгруэнтных отверстий

Пронина Юлия Григорьевна – доцент кафедры вычислительных методов механики деформируемого тела факультета прикладной математики–процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета. Количество опубликованных работ: 43. Научные направления: задачи о распределении напряжений в окрестности отверстий, разрушение тел в коррозионных средах. E-mail: DearJuly@gmail.com.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 06-01-0171, 08-01-00394).

© Ю. Г. Пронина, 2009

под действием периодической нагрузки. Решение построено в виде комплексных потенциалов, автоматически удовлетворяющих краевым условиям на прямолинейной границе полуплоскости и на бесконечности. Выведены граничные интегральные уравнения Фредгольма первого рода. Далее, – независимо от них – задача сведена к решению системы линейных алгебраических уравнений путем введения фиктивных сосредоточенных воздействий. Представлены некоторые результаты расчетов.

2. Постановка задачи. Рассмотрим упругую полуплоскость $y \leq 0$ с бесконечным рядом отверстий одинаковой конфигурации, расположенных друг от друга на равных расстояниях с периодом l вдоль границы полуплоскости (рис. 1). Пусть форма отверстий описывается простыми непересекающимися гладкими контурами

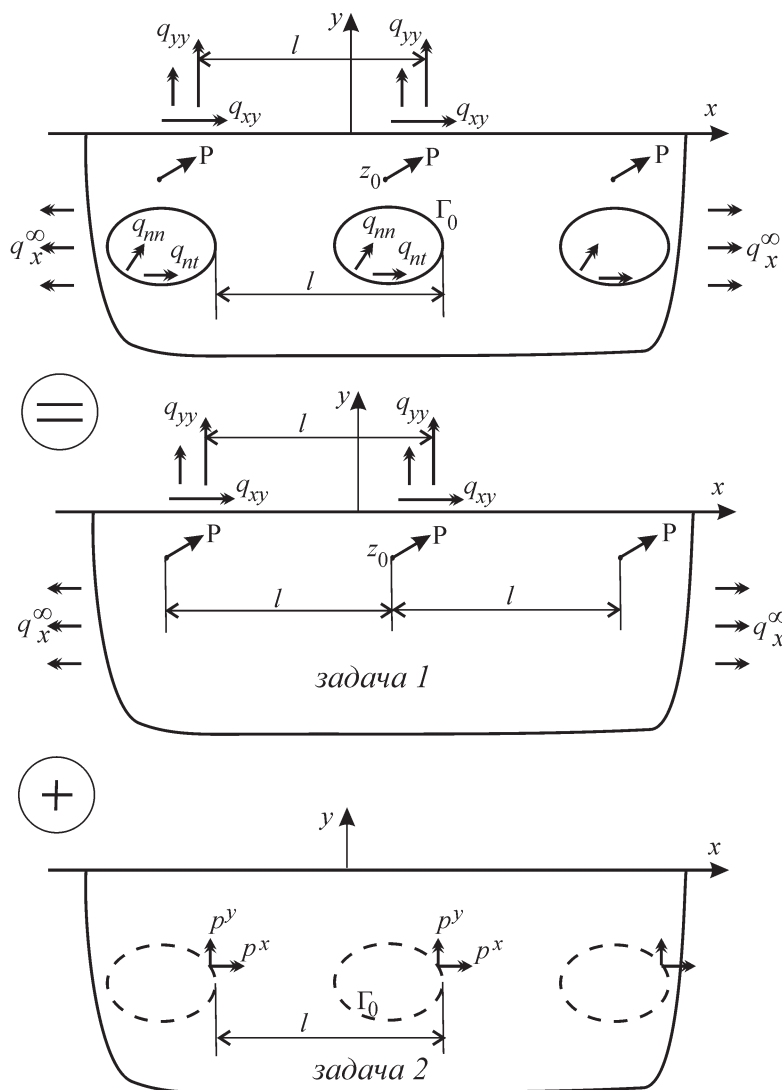


Рис. 1. Схема решения задачи

$$\Gamma_k = \{\zeta + kl \mid \zeta \in \Gamma_0\}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1)$$

Будем считать, что контура Γ_k имеют кривизну, удовлетворяющую условию Гельдера [1]. При этом предполагается, что

1) на бесконечности к полуплоскости приложены постоянные напряжения:

$$\sigma_{xx}^\infty = q_x^\infty = \text{const}, \quad \sigma_{yy}^\infty = q_y^\infty = \text{const}, \quad \sigma_{xy}^\infty = 0;$$

напряжение σ_{yy}^∞ уравнивается аналогичной равномерной нагрузкой на прямолинейной границе $y = 0$;

2) кроме того, на границе $y = 0$ полуплоскости действуют периодические усилия

$$q_{yy}(x) = q_{yy}(x + kl), \quad q_{xy}(x) = q_{xy}(x + kl), \quad x \in [a, b], \quad |b - a| \leq l, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots;$$

3) контур каждого отверстия загружен нормальными и касательными усилиями

$$q_{nn}(t) = q_{nn}(t + kl), \quad q_{nt}(t) = q_{nt}(t + kl), \quad t \in \Gamma_0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots;$$

4) в точках $z_m^k = z_m^0 + kl$ ($m = 1, 2, \dots, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) полуплоскости с отверстиями находятся известные периодические сосредоточенные воздействия, например, такие как сосредоточенные силы, дислокации, силовые или дислокационные диполи, моменты, центры расширения–сжатия.

При этом, конечно, полагаем, что исследуемое тело находится в равновесии, т. е. все периодические нагрузки являются самоуравновешенными или уравниваются друг друга.

Требуется определить напряженное состояние в данном теле.

Вопросы существования и единственности решения задачи при указанных условиях освещены в монографиях [1, 9].

3. Сведение задачи к системе интегральных уравнений. Искомое поле напряжений представим в виде суммы [16]

$$\sigma_{xx}(z) = \sigma_{xx}^{(1)}(z) + \sigma_{xx}^{(2)}(z), \quad \sigma_{yy}(z) = \sigma_{yy}^{(1)}(z) + \sigma_{yy}^{(2)}(z), \quad \sigma_{xy}(z) = \sigma_{xy}^{(1)}(z) + \sigma_{xy}^{(2)}(z). \quad (2)$$

Здесь слагаемые с индексом (1) суть напряжения в полуплоскости с прямолинейной границей, загруженной усилиями $q_{yy}(x)$, $q_{xy}(x)$, q_x^∞ , q_y^∞ и сосредоточенными воздействиями – задача 1 (рис. 1). Индексом (2) отмечены аналогичные величины в сплошной полуплоскости (без отверстий), внутри которой на линиях, соответствующих контурам отверстий, действуют неизвестные заранее и подлежащие определению усилия $\mathbf{p}_k(\zeta) = p_k^x(\zeta) + ip_k^y(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma_k$ – задача 2. Ввиду периодичности задачи искомые нагрузки на каждом контуре во второй задаче также должны быть одинаковыми, поэтому индекс k можно опустить (рис. 1):

$$\mathbf{p}(\zeta) = \mathbf{p}(\zeta + kl), \quad \zeta \in \Gamma_0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Очевидно, что если внешняя нагрузка задана только на контурах отверстий, то все компоненты напряжений в задаче 1 равны нулю.

Компоненты напряжений для каждой из этих задач ($p = 1, 2$) удовлетворяют формулам Г. В. Колосова [1]

$$\sigma_{xx}^{(p)}(z) + \sigma_{yy}^{(p)}(z) = 4\text{Re}\Phi^{(p)}(z), \quad \sigma_{yy}^{(p)}(z) - \sigma_{xx}^{(p)}(z) + 2i\sigma_{xy}^{(p)}(z) = 2[\bar{z}\Phi^{(p)'}(z) + \Psi^{(p)}(z)]. \quad (3)$$

Черта сверху означает комплексное сопряжение, штрих – производную по аргументу, $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$.

Функции $\Phi^{(1)}(z)$ и $\Psi^{(1)}(z)$, согласно [1], определяются выражениями

$$\begin{aligned}\Phi^{(1)}(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{a+kl}^{b+kl} \frac{q_{yy}(\tau) - iq_{xy}(\tau)}{\tau - z} d\tau + \frac{q_x^\infty}{4} + \frac{q_y^\infty}{4} + \sum_m \Phi_m^*(z, z_m), \\ \Psi^{(1)}(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{a+kl}^{b+kl} \frac{q_{yy}(\tau) + iq_{xy}(\tau)}{\tau - z} d\tau + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{a+kl}^{b+kl} \frac{q_{yy}(\tau) - iq_{xy}(\tau)}{(\tau - z)^2} \tau d\tau - \frac{q_x^\infty}{2} + \frac{q_y^\infty}{2} + \sum_m \Psi_m^*(z, z_m),\end{aligned}$$

где интегрирование производится по вещественной оси (τ – локальная переменная интегрирования); $\Phi_m^*(z, z_m)$, $\Psi_m^*(z, z_m)$ – комплексные потенциалы для периодических воздействий, приложенных в точках z_m^k сплошной полуплоскости. Выражения для них можно найти, например, в [17–20].

Функции Г. В. Колосова для второй задачи имеют вид [16]

$$\begin{aligned}\Phi^{(2)}(z) &= - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{\Gamma_k} \frac{\mathbf{p}(\zeta)}{2\pi(1+\kappa)} \left[\frac{1}{z-\zeta} + \frac{\kappa}{z-\bar{\zeta}} \right] ds - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{\Gamma_k} \frac{\overline{\mathbf{p}(\zeta)}}{2\pi(1+\kappa)} \frac{\bar{\zeta}-\zeta}{(z-\bar{\zeta})^2} ds, \\ \Psi^{(2)}(z) &= - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{\Gamma_k} \frac{\mathbf{p}(\zeta)}{2\pi(1+\kappa)} \left[\frac{\bar{\zeta}}{(z-\zeta)^2} + \frac{\kappa\bar{\zeta}}{(z-\bar{\zeta})^2} \right] ds + \\ &+ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{\Gamma_k} \frac{\overline{\mathbf{p}(\zeta)}}{2\pi(1+\kappa)} \left[\frac{\kappa}{z-\bar{\zeta}} + \frac{1}{z-\zeta} - \frac{\bar{\zeta}-\zeta}{(z-\bar{\zeta})^2} - \frac{2\bar{\zeta}(\bar{\zeta}-\zeta)}{(z-\bar{\zeta})^3} \right] ds.\end{aligned}$$

Здесь и далее $\overline{\mathbf{p}(\zeta)}$ означает величину, комплексно сопряженную к $\mathbf{p}(\zeta)$, ds – дифференциал дуги соответствующего контура Γ_k , $\zeta \in \Gamma_k$, $\bar{\zeta} \notin \Gamma_k$; $\kappa = 3 - 4\nu$ в случае плоской деформации и $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ при обобщенном плоском напряженном состоянии, ν – коэффициент Пуассона материала полуплоскости.

Запишем выражения для функций $\Phi^{(2)}(z)$ и $\Psi^{(2)}(z)$ с учетом (1) в виде

$$\begin{aligned}\Phi^{(2)}(z) &= - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{\Gamma_0} \frac{\mathbf{p}(\zeta)}{2\pi(1+\kappa)} \left[\frac{1}{z-\zeta+kl} + \frac{\kappa}{z-\bar{\zeta}+kl} \right] ds - \\ &- \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{\Gamma_0} \frac{\overline{\mathbf{p}(\zeta)}}{2\pi(1+\kappa)} \frac{\bar{\zeta}-\zeta}{(z-\bar{\zeta}+kl)^2} ds, \\ \Psi^{(2)}(z) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{\Gamma_0} \frac{\mathbf{p}(\zeta)}{2\pi(1+\kappa)} \left[\frac{1}{z-\zeta+kl} + \frac{\kappa}{z-\bar{\zeta}+kl} - \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{z + (\bar{\zeta} - \zeta)}{(z - \zeta + kl)^2} - \frac{\kappa z}{(z - \bar{\zeta} + kl)^2} \Big] ds + \\
& + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{\Gamma_0} \frac{\overline{\mathbf{p}(\zeta)}}{2\pi(1+\kappa)} \left[\frac{\kappa}{z - \zeta + kl} + \frac{1}{z - \bar{\zeta} + kl} + \frac{\bar{\zeta} - \zeta}{(z - \bar{\zeta} + kl)^2} - \frac{2z(\bar{\zeta} - \zeta)}{(z - \bar{\zeta} + kl)^3} \right] ds.
\end{aligned}$$

Следуя [17], воспользуемся разложением [10]:

$$\operatorname{ctg} x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x + k\pi},$$

а также соотношениями, получаемыми дифференцированием последнего равенства:

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x + k\pi)^2}, \quad \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x + k\pi)^3}.$$

Тогда выражения для потенциалов $\Phi^{(2)}(z)$ и $\Psi^{(2)}(z)$ можно записать в такой окончательной форме:

$$\begin{aligned}
\Phi^{(2)}(z) = & - \int_{\Gamma_0} \left\{ \frac{\mathbf{p}(\zeta)}{2l(1+\kappa)} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi(z - \zeta)}{l} + \kappa \operatorname{ctg} \frac{\pi(z - \bar{\zeta})}{l} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\pi \overline{\mathbf{p}(\zeta)}}{2l^2(1+\kappa)} \frac{\bar{\zeta} - \zeta}{\sin^2 [\pi(z - \bar{\zeta})/l]} \right\} ds,
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\Psi^{(2)}(z) = & \int_{\Gamma_0} \left\{ \frac{\mathbf{p}(\zeta)}{2l(1+\kappa)} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi(z - \zeta)}{l} + \kappa \operatorname{ctg} \frac{\pi(z - \bar{\zeta})}{l} - \right. \right. \\
& - \frac{\pi}{l} \left[\frac{(\bar{\zeta} - \zeta) + z}{\sin^2 [\pi(z - \zeta)/l]} + \frac{\kappa z}{\sin^2 [\pi(z - \bar{\zeta})/l]} \right] \Big) + \\
& + \frac{\overline{\mathbf{p}(\zeta)}}{2l(1+\kappa)} \left(\kappa \operatorname{ctg} \frac{\pi(z - \zeta)}{l} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(z - \bar{\zeta})}{l} + \right. \\
& \left. \left. + \frac{\pi(\bar{\zeta} - \zeta)}{l} \left[\frac{1}{\sin^2 [\pi(z - \bar{\zeta})/l]} - \frac{2\pi z}{l} \frac{\operatorname{ctg} [\pi(z - \bar{\zeta})/l]}{\sin^2 [\pi(z - \bar{\zeta})/l]} \right] \right) \right\} ds.
\end{aligned}$$

Проводя аналогичные выкладки для функций $\Phi^{(1)}(z)$ и $\Psi^{(1)}(z)$ с учетом периодичности известной внешней нагрузки, получим [16, 21]

$$\begin{aligned}
\Phi^{(1)}(z) = & - \frac{1}{2li} \int_a^b [q_{yy}(\tau) - iq_{xy}(\tau)] \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau - z)}{l} d\tau + \frac{q_x^\infty}{4} + \frac{q_y^\infty}{4} + \sum_m \Phi_m^*(z, z_m), \\
\Psi^{(1)}(z) = & - \frac{1}{l} \int_a^b q_{xy}(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau - z)}{l} d\tau + \frac{z\pi}{2l^2i} \int_a^b \frac{q_{yy}(\tau) - iq_{xy}(\tau)}{\sin^2 [\pi(\tau - z)/l]} d\tau -
\end{aligned} \tag{5}$$

$$-\frac{q_x^\infty}{2} + \frac{q_y^\infty}{2} + \sum_m \Psi_m^*(z, z_m).$$

При таком выборе функций $\Phi^{(p)}(z)$ и $\Psi^{(p)}(z)$ краевые условия удовлетворяются на прямолинейной границе полуплоскости и на бесконечности. На контурах отверстий они имеют вид

$$\sigma_{nn}^{(1)}(t) + \sigma_{nn}^{(2)}(t) = q_{nn}^k(t), \quad \sigma_{nt}^{(1)}(t) + \sigma_{nt}^{(2)}(t) = q_{nt}^k(t)$$

или

$$\sigma_{nn}^{(2)}(t) - i\sigma_{nt}^{(2)}(t) = q_{nn}^k(t) - iq_{nt}^k(t) - \sigma_{nn}^{(1)}(t) + i\sigma_{nt}^{(1)}(t), \quad t \in \Gamma_k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6)$$

Здесь $\sigma_{nn}^{(p)}(t)$ и $\sigma_{nt}^{(p)}(t)$ – нормальная и касательная компоненты напряжения на кривых Γ_k в задаче 1 при $p = 1$ и задаче 2 при $p = 2$. Следуя [1], можно написать

$$\sigma_{nn}^{(p)}(z) - i\sigma_{nt}^{(p)}(z) = 2\operatorname{Re}\Phi^{(p)}(z) - \left[\bar{z}\Phi^{(p)'}(z) + \Psi^{(p)}(z)\right] e^{2i\theta} \quad (p = 1, 2), \quad (7)$$

где θ – угол между нормалью к соответствующему контуру Γ_k и осью Ox .

Вследствие периодичности задачи краевые условия (6) на каждом контуре совпадают, поэтому из всех уравнений правомерно использовать только одно: для Γ_0 . Внося в него соотношения (7), (4), (5), приходим к интегральному уравнению относительно неизвестной нагрузки $\mathbf{p}(\zeta)$:

$$\int_{\Gamma_0} \mathbf{p}(\zeta) K(t, \zeta) ds + \int_{\Gamma_0} \overline{\mathbf{p}(\zeta)} R(t, \zeta) ds = f(t), \quad t \in \Gamma_0, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} K(t, \zeta) = & -\frac{1}{2l(1+\kappa)} \left\{ \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-\zeta)}{l} + \kappa \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-\bar{\zeta})}{l} - \frac{\pi}{l} \frac{\bar{\zeta}-\zeta}{\sin^2 \frac{\pi(\bar{t}-\zeta)}{l}} + \right. \\ & + \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(t-\zeta)}{l} + \kappa \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-\bar{\zeta})}{l} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\pi}{l} \frac{(\bar{t}-t) - (\bar{\zeta}-\zeta)}{\sin^2 \frac{\pi(t-\zeta)}{l}} + \frac{\pi}{l} \frac{\kappa(\bar{t}-t)}{\sin^2 [\pi(t-\bar{\zeta})/l]} \right] e^{2i\theta} \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} R(t, \zeta) = & -\frac{1}{2l(1+\kappa)} \left\{ \operatorname{ctg} \frac{\pi(\bar{t}-\bar{\zeta})}{l} + \kappa \operatorname{ctg} \frac{\pi(\bar{t}-\zeta)}{l} + \frac{\pi}{l} \frac{\bar{\zeta}-\zeta}{\sin^2 [\pi(t-\bar{\zeta})/l]} + \right. \\ & + \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(t-\bar{\zeta})}{l} + \kappa \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-\zeta)}{l} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\pi}{l} \frac{(\bar{\zeta}-\zeta)}{\sin^2 \frac{\pi(t-\bar{\zeta})}{l}} + \frac{2\pi^2}{l^2} \frac{(\bar{\zeta}-\zeta)(\bar{t}-t) \operatorname{ctg}[\pi(t-\bar{\zeta})/l]}{\sin^2 [\pi(t-\bar{\zeta})/l]} \right] e^{2i\theta} \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(t) = & q_{nn}(t) - iq_{nt}(t) + \frac{1}{2li} \int_a^b [q_{yy}(\tau) - iq_{xy}(\tau)] \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau - t)}{l} d\tau - \\
& - \frac{1}{2li} \int_a^b [q_{yy}(\tau) + iq_{xy}(\tau)] \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau - \bar{t})}{l} d\tau - \frac{q_x^\infty}{2} - \frac{q_y^\infty}{2} - \\
& - \left(\frac{1}{l} \int_a^b q_{xy}(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau - t)}{l} d\tau + \frac{\pi(\bar{t} - t)}{2l^2i} \int_a^b \frac{q_{yy}(\tau) - iq_{xy}(\tau)}{\sin^2 [\pi(\tau - t)/l]} d\tau + \frac{q_x^\infty}{2} - \frac{q_y^\infty}{2} \right) e^{2i\theta} - \\
& - \sum_m \{ 2\operatorname{Re} \Phi_m^*(t, z_m) - [\bar{t} \Phi_m^{*'}(t, z_m) + \Psi_m^*(t, z_m)] e^{2i\theta} \}. \quad (10)
\end{aligned}$$

Конкретные замкнутые выражения для функции $f(t)$, а также для потенциалов $\Phi_m^*(z, z_m)$ и $\Psi_m^*(z, z_m)$ в том случае, когда в полуплоскости действуют периодические системы сосредоточенных сил и моментов, представлены в [16], где следует положить периоды всех систем равными l .

Разделяя вещественную и мнимую части уравнения (8), приходим к системе двух вещественных интегральных уравнений относительно неизвестных $p^x(\zeta)$, $p^y(\zeta)$:

$$\int_{\Gamma_0} p^x(\zeta) K_1(t, \zeta) ds + \int_{\Gamma_0} p^y(\zeta) R_1(t, \zeta) ds = f_1(t), \quad (11)$$

$$\int_{\Gamma_0} p^x(\zeta) K_2(t, \zeta) ds + \int_{\Gamma_0} p^y(\zeta) R_2(t, \zeta) ds = f_2(t),$$

где

$$K_1(t, \zeta) = \operatorname{Re} (K(t, \zeta) + R(t, \zeta)), \quad R_1(t, \zeta) = \operatorname{Im} (-K(t, \zeta) + R(t, \zeta)), \quad (12)$$

$$K_2(t, \zeta) = \operatorname{Im} (K(t, \zeta) + R(t, \zeta)), \quad R_2(t, \zeta) = \operatorname{Re} (K(t, \zeta) - R(t, \zeta)),$$

$$f_1(t) = \operatorname{Re} f(t) = q_{nn}(t) - \sigma_{nn}^{(1)}(t), \quad f_2(t) = \operatorname{Im} f(t) = -q_{nt}(t) + \sigma_{nt}^{(1)}(t). \quad (13)$$

Некоторые методы решения граничных интегральных уравнений представлены, например, в монографиях [8, 9]. Однако задача может быть непосредственно сведена к системе линейных алгебраических уравнений, что показано ниже.

4. Приведение задачи к системе алгебраических уравнений. Сведем теперь поставленную задачу к системе алгебраических уравнений [16]. Для этого в качестве второй вспомогательной возьмем задачу о сплошной полуплоскости, загруженной в точках $\zeta_k^j = \zeta_0^j + kl$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), лежащих справа от контуров Γ_k (при обходе контуров по часовой стрелке), фиктивными сосредоточенными силами $\mathbf{p}^j = \mathbf{p}(\zeta_k^j) = p_j^x + ip_j^y$ ($j = 1, \dots, N$), не зависящими от k (рис. 2).

Заметим, что в некоторых случаях точки приложения сил целесообразно размещать очень близко друг к другу или использовать их предельные комбинации: двойные силы (с моментом или без момента), сосредоточенные моменты (пары) или центры

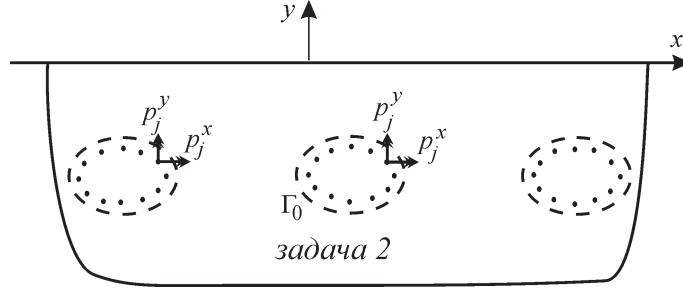


Рис. 2. Дискретизация неизвестной нагрузки

расширения–сжатия. Осуществляя дальнейшие переходы к пределам (или производя операции взятия производных), получим особенности более высокого порядка (мультиполи). Такие моменты разных порядков используют для расчета полей напряжений в окрестности отверстий, форма которых близка к круговой [15], располагая их в центре выреза. Центрами сжатия [19], например, правомерно моделировать микропоры под действием давления, когда взаимным влиянием границ пор и тела можно пренебречь. При достаточно сложной нагрузке и конфигурации отверстий, логичнее размещать фиктивные воздействия вдоль всего контура. Если контур гладкий и нагрузка на контуре распределенная, то указанные точки следует располагать на достаточном расстоянии от границы отверстия. При этом расчеты показали, что расстояние между соседними точками не должно превышать половины расстояния до контура отверстия [16]. Исключения могут составлять участки с очень малой кривизной, где необходимо располагать как фиктивные сосредоточенные силы, так и диполи [8]. Потенциалы Г. В. Колосова для диполей, моментов и центров расширения–сжатия в упругой полуплоскости приведены в [17–20]. С их помощью данное ниже решение без особого труда можно обобщить и на случай использования различных фиктивных особенностей. Здесь же, для простоты изложения, представлено решение только для фиктивных сосредоточенных сил. В этом случае функции Г. В. Колосова для задачи 2 определяются выражениями [17]

$$\Phi^{(2)}(z) = - \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{p_j^x + ip_j^y}{2l(1+\kappa)} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi(z - \zeta_0^j)}{l} + \kappa \operatorname{ctg} \frac{\pi(z - \bar{\zeta}_0^j)}{l} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\pi(p_j^x - ip_j^y)}{2l^2(1+\kappa)} \frac{\bar{\zeta}_0^j - \zeta_0^j}{\sin^2 [\pi(z - \bar{\zeta}_0^j)/l]} \right\}, \quad (14)$$

$$\Psi^{(2)}(z) = \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{p_j^x + ip_j^y}{2l(1+\kappa)} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi(z - \zeta_0^j)}{l} + \kappa \operatorname{ctg} \frac{\pi(z - \bar{\zeta}_0^j)}{l} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\pi}{l} \left[\frac{(\bar{\zeta}_0^j - \zeta_0^j) + z}{\sin^2 [\pi(z - \zeta_0^j)/l]} + \frac{\kappa z}{\sin^2 [\pi(z - \bar{\zeta}_0^j)/l]} \right] \right) + \right. \\ \left. + \frac{p_j^x - ip_j^y}{2l(1+\kappa)} \left(\kappa \operatorname{ctg} \frac{\pi(z - \zeta_0^j)}{l} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(z - \bar{\zeta}_0^j)}{l} + \right. \right.$$

$$+ \frac{\pi(\bar{\zeta}_0^j - \zeta_0^j)}{l} \left[\frac{1}{\sin^2 [\pi(z - \bar{\zeta}_0^j)/l]} - \frac{2\pi z}{l} \frac{\operatorname{ctg}[\pi(z - \bar{\zeta}_0^j)/l]}{\sin^2 [\pi(z - \bar{\zeta}_0^j)/l]} \right] \Bigg) \Bigg\}.$$

При таком выборе комплексных потенциалов для второй вспомогательной задачи после преобразований, аналогичных тем, которые использованы при выводе интегральных уравнений (11), краевое условие (6) сведем к системе двух уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N p_j^x K_1(t, \zeta_0^j) + \sum_{j=1}^N p_j^y R_1(t, \zeta_0^j) &= f_1(t), \\ \sum_{j=1}^N p_j^x K_2(t, \zeta_0^j) + \sum_{j=1}^N p_j^y R_2(t, \zeta_0^j) &= f_2(t). \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты $K_1(z, \zeta_k^j)$, $K_2(z, \zeta_k^j)$, $R_1(z, \zeta_k^j)$, $R_2(z, \zeta_k^j)$ определяются соответственно соотношениями (12) и (9), а правые части $f_1(z)$, $f_2(z)$ – формулами (13) и (10).

Заставив эти уравнения удовлетворяться в N точках коллокации $t^j \in \Gamma_0$ ($j = 1, \dots, N$), получим систему $2N$ линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных p_j^x и p_j^y

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N p_j^x K_1(t^j, \zeta_0^j) + \sum_{j=1}^N p_j^y R_1(t^j, \zeta_0^j) &= f_1(t^j), \\ \sum_{j=1}^N p_j^x K_2(t^j, \zeta_0^j) + \sum_{j=1}^N p_j^y R_2(t^j, \zeta_0^j) &= f_2(t^j), \end{aligned} \quad (15)$$

$$j = 1, \dots, N.$$

5. Численная реализация. Решив систему уравнений (15), с помощью (14) несложно определить функции $\Phi^{(2)}$ и $\Psi^{(2)}$. После этого по формулам Колосова (3), (7) можно вычислить компоненты напряжений в задачах 1 и 2. Окончательно значения напряжений в исходной задаче вычисляются суммированием (2). Решение интегрального уравнения (8) или системы (11) здесь не обсуждается.

Погрешность решения оценивается разностью значений рассчитанных напряжений на контуре отверстия между точками коллокации (где решение удовлетворяется автоматически) и заданными на нем соответствующими усилиями. Одним из важных критериев выбора точек приложения фиктивных сил и узлов коллокации является мера обусловленности матрицы системы (15). Значительное увеличение числа N при сохранении равномерности сетки приводит к неприемлемому росту погрешности. Это связано с плохой обусловленностью формируемой системы алгебраических уравнений при сближении точек ζ_0^j . К подобному эффекту приводит сближение точек приложения фиктивных сил и узлов коллокации. Выработка строгих методов построения хорошо обусловленной системы (15) требует неоправданно большого объема вычислений. Интуитивный выбор точек ζ_0^j и t^j с учетом рекомендаций, данных в п. 4, приводит к хорошим результатам.

Наличие периодического ряда отверстий в полуплоскости способно как повышать, так и понижать уровень напряжений по сравнению с напряжениями в окрестности одиночного выреза в зависимости от типа внешней нагрузки. Влияние периода системы на коэффициенты концентрации напряжений в простейших случаях проиллюстрировано на рис. 3. В качестве примера рассмотрена полуплоскость с периодической системой

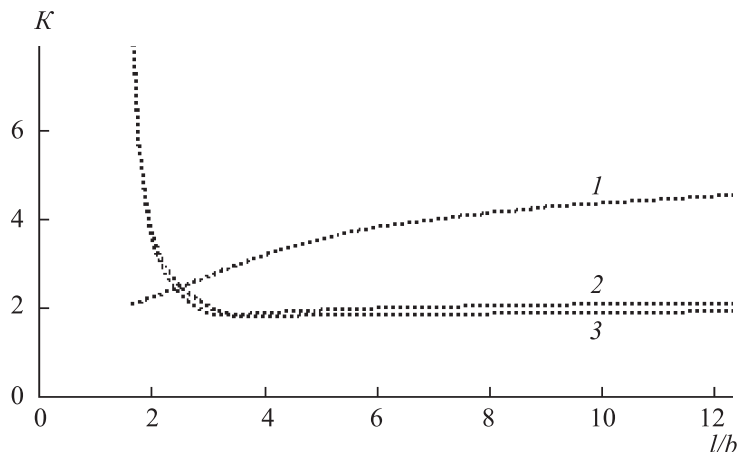


Рис. 3. Влияние периода системы отверстий на концентрацию напряжений
Объяснение в тексте.

эллиптических вырезов (графики приведены для соотношения полуосей, равного $3/4$). По оси абсцисс откладывается отношение периода системы l к полуоси эллипса b , параллельной оси Oy . Ось ординат характеризует значение коэффициента концентрации напряжений. Кривая 1 соответствует растяжению полуплоскости вдоль ее прямолинейной границы, кривая 2 – растяжению вдоль оси Oy , кривая 3 – двухосному напряженному состоянию. Интересен тот факт, что при увеличении периода l стремление коэффициентов концентрации напряжений в периодической задаче к аналогичным величинам в полуплоскости с одиночным отверстием при соответствующей нагрузке не всегда монотонно. В частности, на рис. 3 видно, что кривые 2 и 3 имеют слабый минимум. Наличие локальных экстремумов на аналогичных кривых наблюдается и при действии сосредоточенных воздействий. Это объясняется слиянием областей экстремальных напряжений, порожденных соседними концентраторами напряжений при их сближении.

Литература

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
2. Howland R. C. J. Stress in a plate containing an infinite row of holes // Proc. of the Roy. Soc. of London. Ser. A. 1935. Vol. 148. P. 471–491.
3. Савин Г. Н. Напряжения в упругой плоскости с бесконечным рядом равных вырезов // Докл. АН СССР. 1939. Т. 23, № 6. С. 515–518.
4. Шерман Д. И. Весомая среда, ослабленная периодически расположенными отверстиями круговой и некруговой формы / Инженер. журн. 1961. Т. 1, вып. 1. С. 92–103.
5. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наукова думка, 1968. 888 с.
6. Григolloк Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970. 556 с.
7. Петерсон Р. Коэффициенты концентрации напряжений: Графики и формулы для расчета конструктивных элементов на прочность / пер. с англ. И. А. Нечая и др. М.: Мир, 1977. 304 с.
8. Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. Киев: Наукова думка, 1989. 248 с.
9. Линьков А. М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. СПб.: Наука, 1999. 382 с.

10. Физтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 2 т. М.: Наука, 1962. Т. 2. 800 с.
11. Rokhlin V. Rapid solution of integral equations of classical potential theory // J. Comput. Phys. 1985. Vol. 60. P. 187–207.
12. Greengard L. F., Rokhlin V. A fast algorithm for particle simulations // J. Comput. Phys. 1987. Vol. 73(2). P. 325–348.
13. Kzaz M. Convergence acceleration of Jacobi–Gauss quadrature formulae for analytic functions with poles // J. Comput. and Appl. Math. 1995. Vol. 57, N 1–2. P. 181–192.
14. Liu Y. A new fast multipole boundary element method for solving large-scale two-dimensional elastostatic problems // Intern. J. Numer. Meth. Engng. 2006. Vol. 65. P. 863–881.
15. Мокряков В. В. Применение метода мультиполей для решения задачи о двух близко расположенных отверстиях // Изв. РАН. Сер. МТТ. 2007. № 5. С. 129–145.
16. Пронина Ю. Г. Сосредоточенные силы и моменты в упругой полуплоскости с отверстием // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2009. Вып. 2. С. 104–114.
17. Даль Ю. М., Пронина Ю. Г. Сосредоточенные силы и моменты у границы упругой полуплоскости // Изв. РАН. Сер. МТТ. 1998. № 5. С. 78–87.
18. Греков М. А. Сингулярная плоская задача теории упругости. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2001. 192 с.
19. Пронина Ю. Г. Центры расширения–сжатия в упругой полуплоскости // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 2007. Вып. 2. С. 140–149.
20. Пронина Ю. Г. Некоторые сингулярные решения теории упругости для полуплоскости // Актуальные проблемы прочности: Материалы XLVI Междунар. конференции. 15–17 окт. 2007 г. Витебск, Беларусь. Ч. 2. Витебск: УО «ВГТУ», 2007. С. 243–248.
21. Пронина Ю. Г. Концентрация напряжений в упругой полуплоскости с краевыми выемками // Изв. РАН. Сер. МТТ. 1998. № 1. С. 103–109.

Статья рекомендована к печати проф. Ю. М. Далем.

Статья принята к печати 5 марта 2009 г.